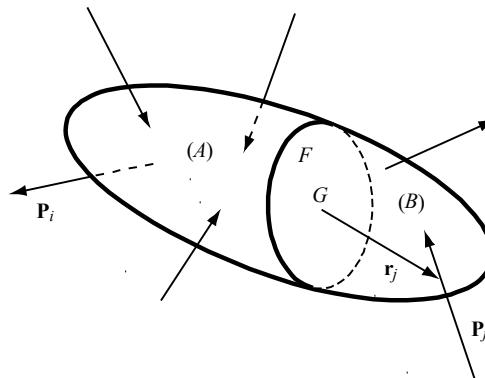


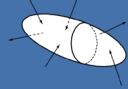
Mécanique des structures



Chapitre 1: Equilibre intérieur d'un solide

Dr. Alain Prenleloup
SGM BA3 2024-2025

EPFL



Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Généralités

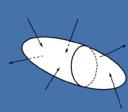
Ayant pour objet fondamental l'étude des corps solides déformables, la mécanique des structures ou des matériaux se propose deux buts principaux, en général indissolubles, le calcul :

- des *efforts intérieurs* ou *contraintes*, provoqués par les forces extérieures
- des *déformations* entraînées par les efforts intérieurs.

La mécanique des structures, appelée naguère *résistance des matériaux*, poursuit un objectif essentiellement utilitaire assurer la sécurité et le bon fonctionnement des constructions, tout en guidant le choix des solutions les plus *performantes*.

On est souvent conduit à des *simplifications* draconiennes, basées sur l'analyse de mesures ou, quand l'expérimentation est impossible, sur des *comparaisons avec des cas similaires* dont la solution est connue.

La théorie de l'élasticité poursuit les mêmes buts que la mécanique des matériaux, mais par un cheminement mathématique rigoureux et sans le recours à des raisonnements qualitatifs basés sur l'expérience.



Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Généralités

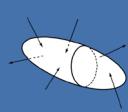
La théorie de l'élasticité permet seule de donner à certains résultats la généralité nécessaire et de *juger de la valeur des hypothèses* simplificatrices faites en mécanique des matériaux

La théorie de l'élasticité et la mécanique des structures sont fondées toutes deux sur la **loi de Hooke** qui suppose une proportionnalité parfaite entre contraintes et déformations. Un corps qui suit la loi de Hooke est dit parfaitement élastique.

La mécanique des matériaux étudie également certains solides ne suivant pas la loi de Hooke ou pour lesquels les contraintes dépassent les limites du comportement élastique. Elle débouche ainsi sur la *théorie de la plasticité*.

Cette théorie présente des difficultés mathématiques considérables en raison de la **non-linéarité** et surtout des phénomènes d'**hystérose** intervenant dans les lois de comportement.

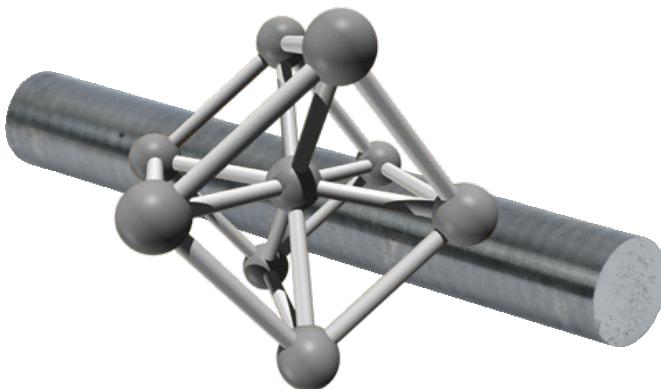
La sécurité d'un élément de construction ne dépend pas seulement du niveau maximum des contraintes et déformations mais encore de la façon dont ces grandeurs varient dans le temps. Cette nouvelle préoccupation fait l'objet des *théories du fluage et de la fatigue*.

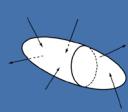


Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Hypothèses fondamentales

- Hypothèse de *continuité* : bien que les solides soient constitués d'atomes, l'étude du comportement à l'échelle macroscopique n'est possible qu'en considérant le solide comme un corps continu.
- Peut-on considérer les échantillons ci-dessous comme des matériaux continus?

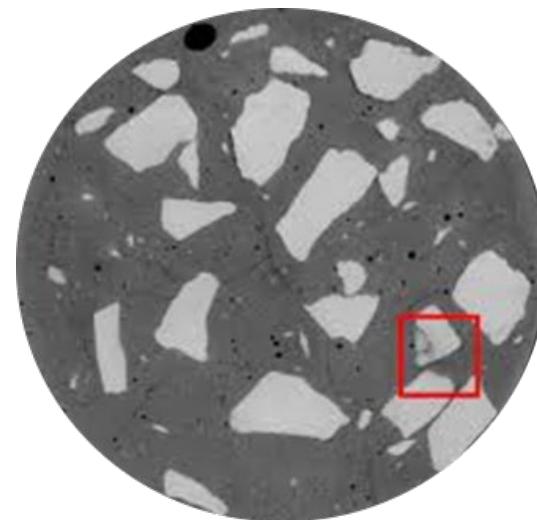




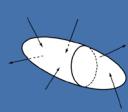
Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Hypothèses fondamentales

- Hypothèse d'*homogénéité* : on considérera que la matière est homogène, c'est à dire que ses propriétés mécaniques sont les mêmes en tout point du solide considéré. Dans le cas contraire on peut découper le solide en plusieurs parties considérées comme homogènes et étudier l'interaction de ces parties entre elles
- Peut-on considérer les échantillons ci-dessous comme des matériaux homogènes?



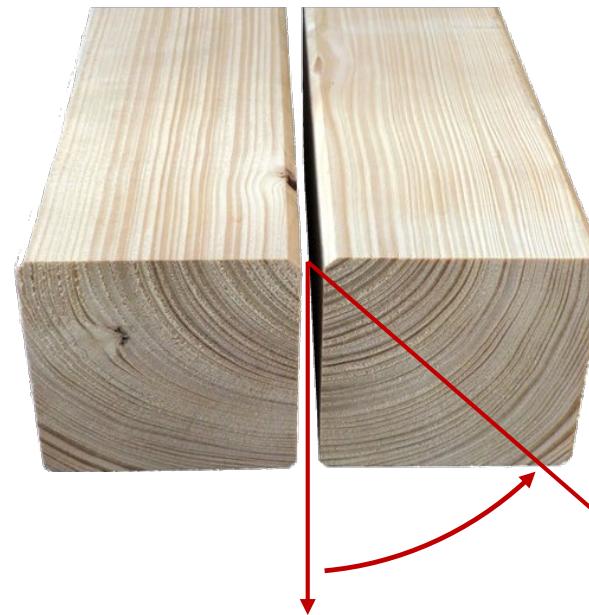
micro vs macro

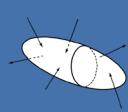


Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Hypothèses fondamentales

- Hypothèse d'*isotropie* : nous admettrons que ses propriétés mécaniques sont identiques dans toutes les directions autour d'un point
- Peut-on considérer les exemples ci-dessous comme des matériaux isotropes ?

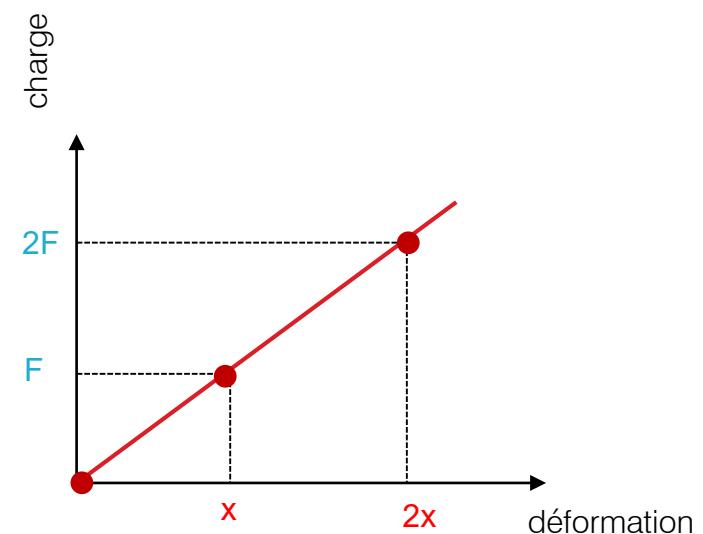
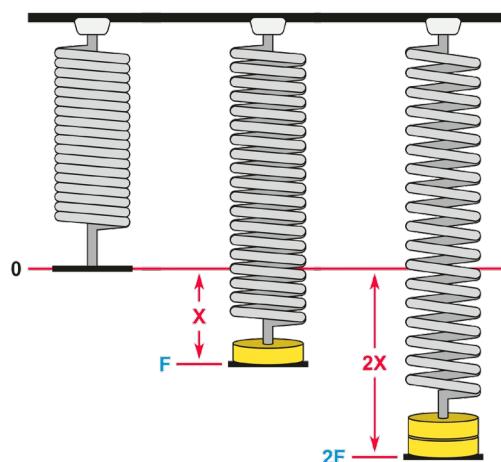


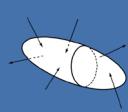


Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Hypothèses fondamentales

- Hypothèse de *proportionnalité* : dans un solide continu, les déformations sont liées en tous points aux contraintes par des relations linéaires et homogènes.

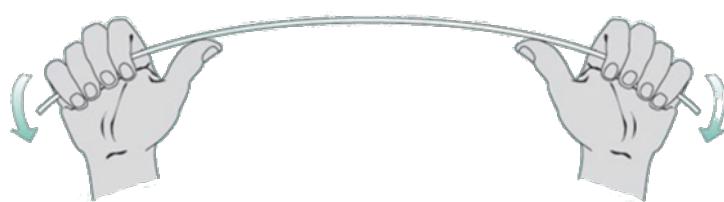




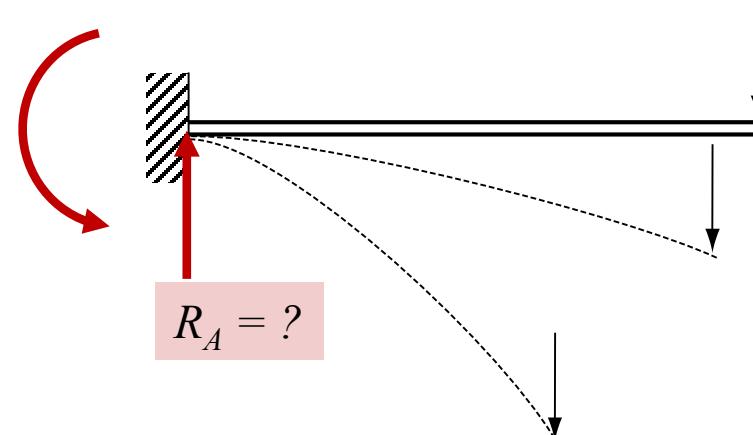
Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

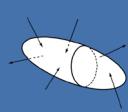
Hypothèses fondamentales

- Hypothèse des *petites déformations* : les déformations ont une influence négligeable sur la position des points d'application ou sur la direction des forces extérieures.



$$M_A = ?$$

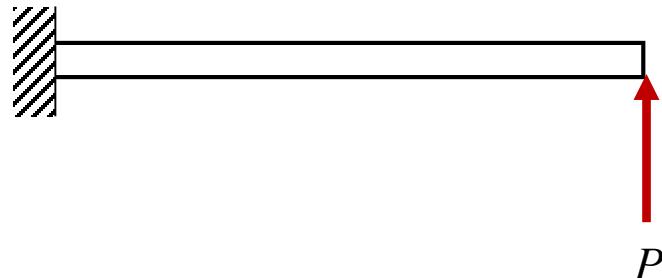




Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Hypothèses fondamentales

Grande déformation d'une poutre encastrée soumise à la flexion



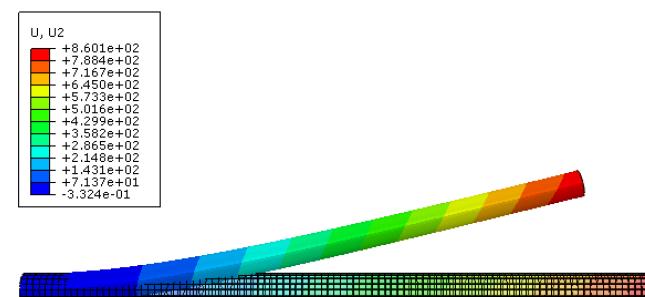
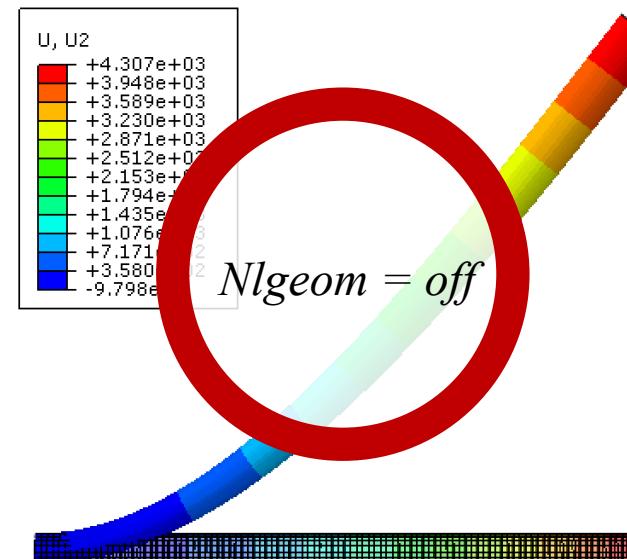
$$D = 50 \text{ mm}$$

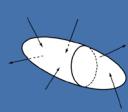
$$\ell = 1 \text{ m}$$

$$E_{caoutchouc} = 0.01 \text{ GPa}$$

$$P = 40 \text{ N}$$

$$\rightarrow \delta = \frac{64 P \ell^3}{3 E \pi D^4} = 4345 \text{ mm}$$



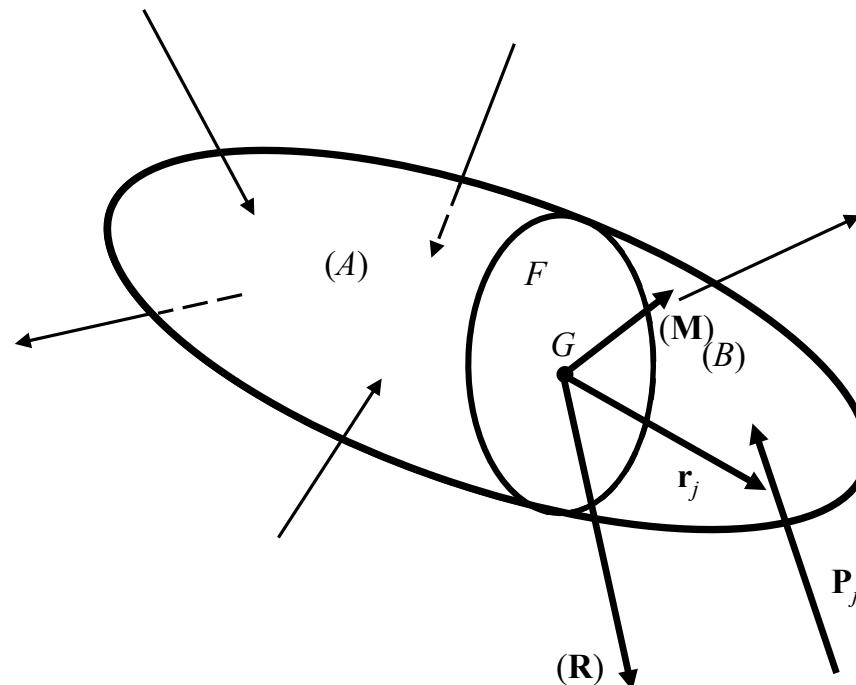


Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Efforts intérieurs et contraintes

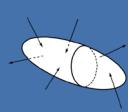
Considérons un corps solide en équilibre :

- (A) corps A
- (B) corps B
- F section plane
- G centre de gravité de la section
- \mathbf{P}_j charge au point j
- \mathbf{r}_j vecteur définissant le point j d'app.de \mathbf{P}_j



La statique permet de remplacer l'action globale de (B) sur (A) par une force \mathbf{R} et un moment \mathbf{M} appliqués au centre de gravité G de la section; \mathbf{R} et \mathbf{M} constituent le *torseur des efforts intérieurs* (\mathbf{R}, \mathbf{M}) et ont pour valeur

- $\mathbf{R} = \sum_{(B)} \mathbf{P}_j$
- $\mathbf{M} = \sum_{(B)} \mathbf{r}_j \wedge \mathbf{P}_j$



Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

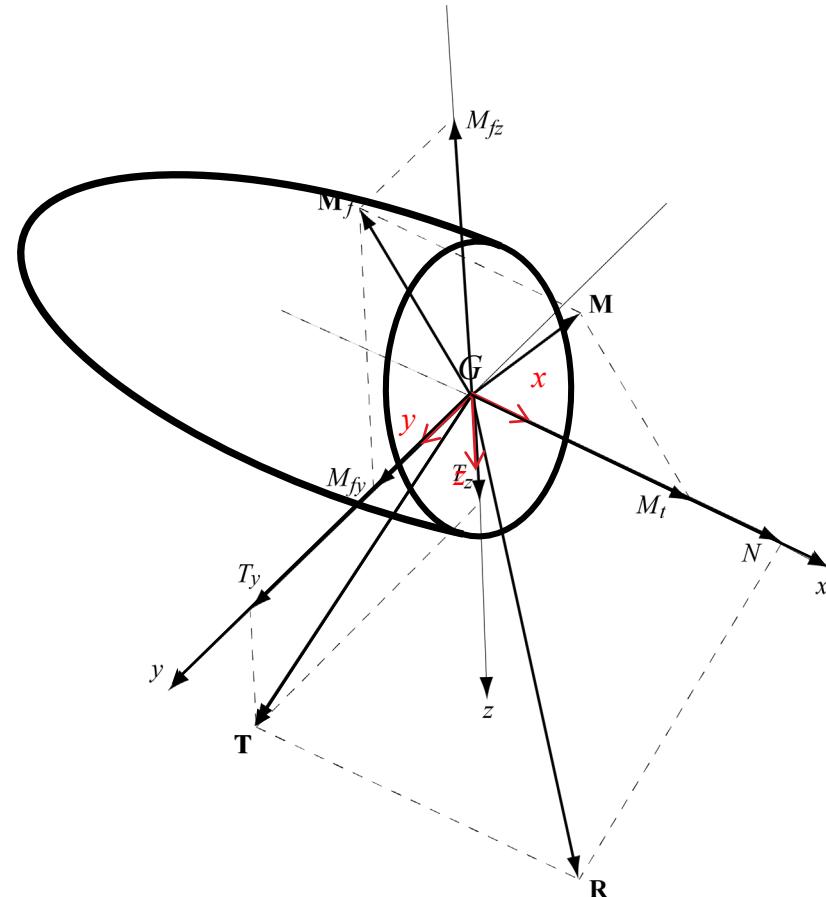
Efforts intérieurs et contraintes

Considérons un corps solide en équilibre :

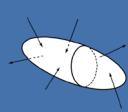
- (A) corps A
- F section plane
- G centre de gravité de la section
- \mathbf{R} force
- \mathbf{M} moment

Le **torseur des efforts intérieurs** se décompose comme suit⁽¹⁾:

- N = effort normal = \mathbf{R} selon Gx
- \mathbf{T} = effort tranchant = $\mathbf{T} = T_y \mathbf{j} + T_z \mathbf{k}$
- M_t = moment de torsion = \mathbf{M} selon Gx
- \mathbf{M}_f = moment de flexion = $\mathbf{M}_f = M_{fy} \mathbf{j} + M_{fz} \mathbf{k}$



⁽¹⁾ Les composantes d'un vecteur sont symbolisés par un caractère gras



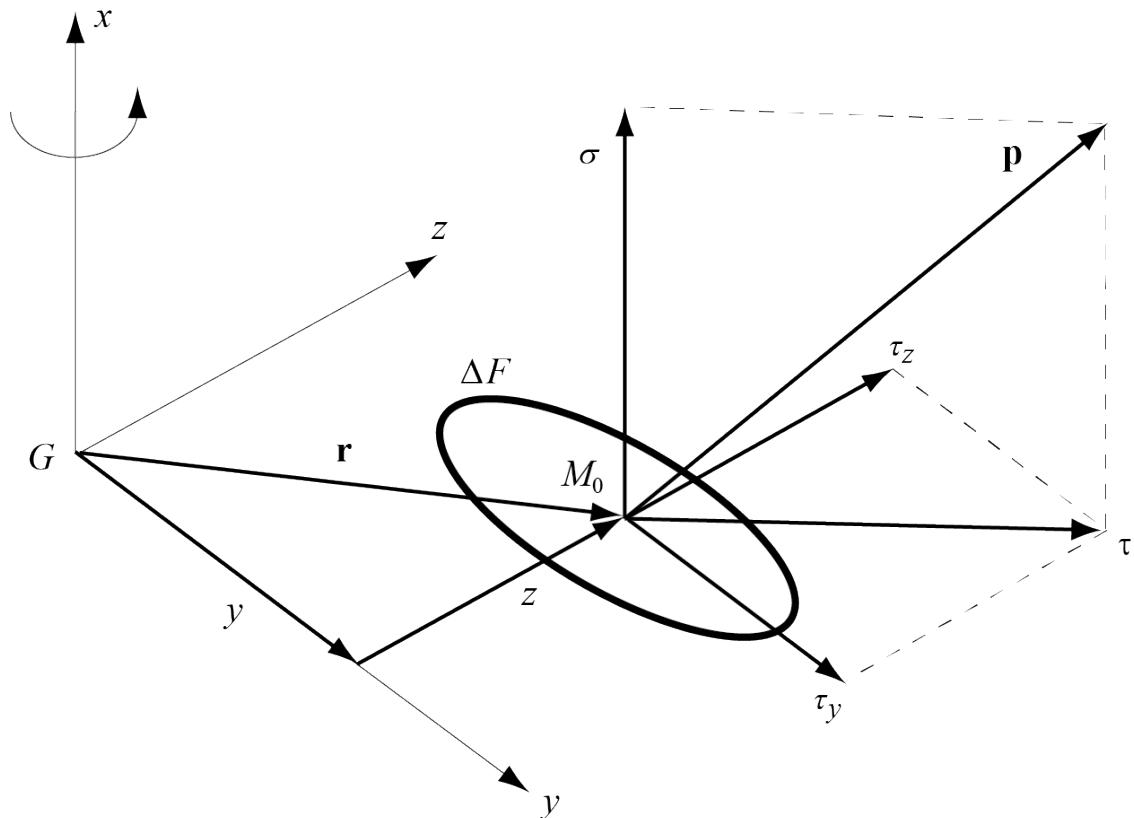
Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

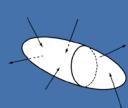
Définition des contraintes

L'action globale (\mathbf{R} , \mathbf{M}) de la partie (B) sur la partie (A) du solide se traduit, en vertu de l'hypothèse de continuité, par une infinité d'actions locales, de nature élastique ou plastique.

Autour d'un point M_0 de la section F , considérons un élément de surface ΔF , sur lequel agit une force élémentaire $\Delta \mathbf{P}$. La **contrainte p** sur cet élément de surface est par définition la limite :

$$\bullet \quad \mathbf{p} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta F} = \frac{d \mathbf{P}}{dF}$$





Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Définition des contraintes

La **contrainte normale** sur l'élément de surface est la composante σ de \mathbf{p} selon la normale à F , c'est-à-dire selon l'axe x .

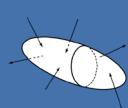
La **contrainte tangentielle** sur l'élément de surface est la composante τ de \mathbf{p} dans le plan de F . Elle se décompose en les contraintes tangentielles τ_y et τ_z selon les axes y et z

L'action globale (\mathbf{R} , \mathbf{M}) de (B) sur (A) est égale à celle de l'ensemble des contraintes \mathbf{p} de la section F

- $\mathbf{R} = \iint_F \mathbf{p} \, dF$
- $\mathbf{M} = \iint_F (\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}) \, dF$

Principe d'équivalence :

« *L'action des forces intérieures spécifiques – ou contraintes – agissant sur une section d'un solide en équilibre est équivalente à l'action des forces extérieures, appliquées sur l'une ou l'autre des parties du solide séparées par la section considérée* »

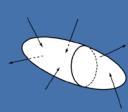


Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Efforts intérieurs et contraintes

Définition des cas particuliers d'**efforts intérieurs** : projection du torseur des efforts sur les axes principaux définis sur le corps (trièdre de référence à **gauche**, inverse pour le corps B)

- $N = \iint_F \sigma \, dF$ $N > 0$ représente l'effort de traction simple ou $N < 0$ de compression, σ est la contrainte normale associée
- $T_y = \iint_F \tau_y \, dF$ T est l'effort tranchant et τ_{xy} et τ_{xz} contrainte tangentielle selon les axes y et z sur la face de normale x
- $M_t = - \iint_F \tau_z y - \tau_y z \, dF$ M_t est le moment de torsion
- $M_{fy} = - \iint_F \sigma z \, dF$ M_{fy} et M_{fz} sont les moments de flexion pure
 $M_{fz} = \iint_F \sigma y \, dF$ (Lorsque le torseur se réduit à un moment de flexion et à un effort tranchant, on parle de flexion simple)

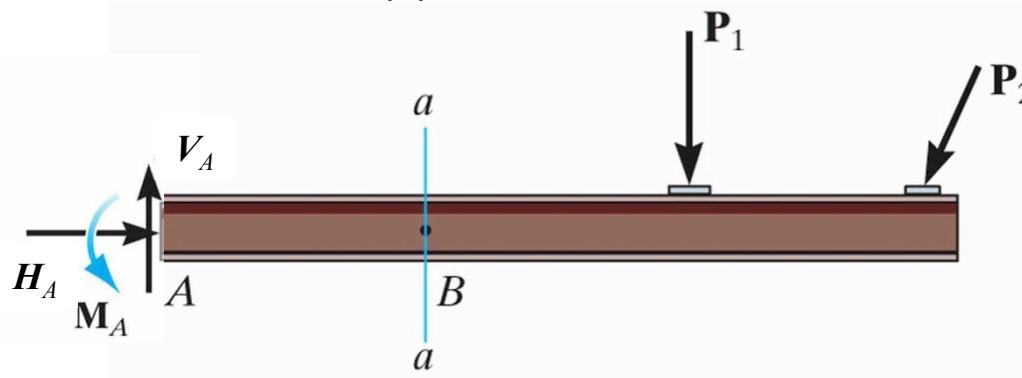


Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

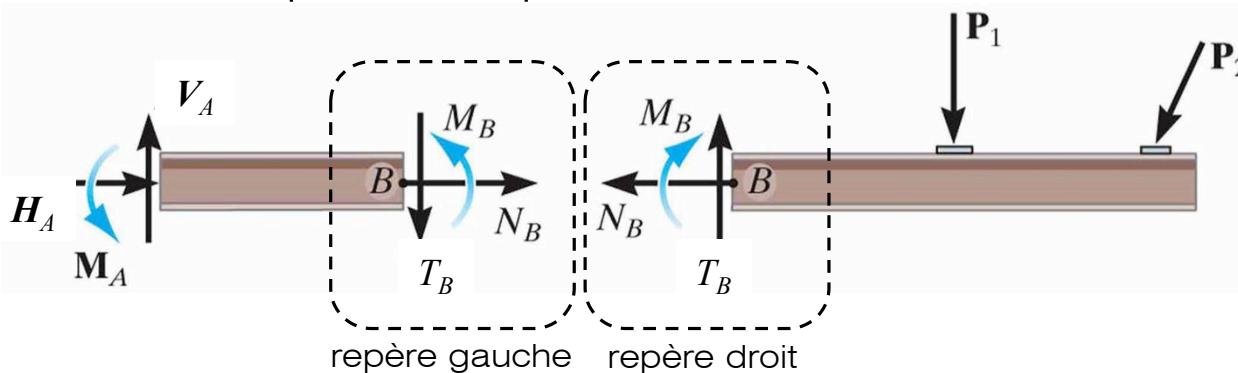
Définition des efforts intérieurs

Quelles sont les **forces internes** au point B ?

- Trouver les réactions des supports

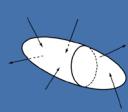


- Couper virtuellement la poutre au point B



- Résoudre chaque sous-système avec $\sum F = 0$ et $\sum M = 0$

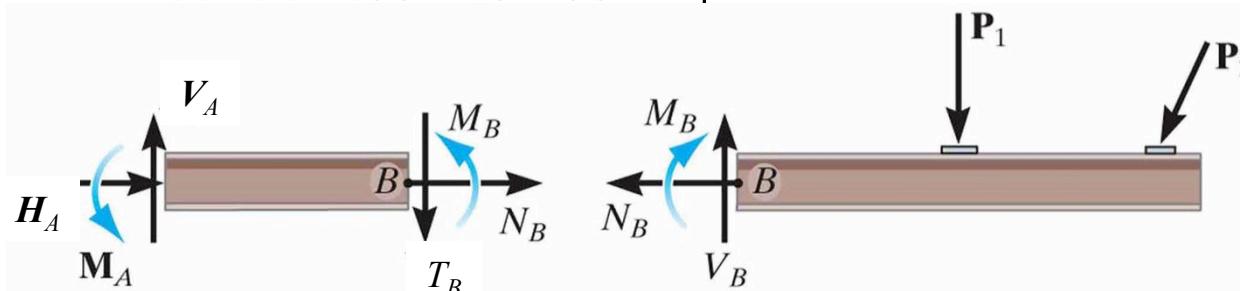
NOTE



Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Définition des efforts intérieurs

Quelles sont les contraintes internes au point B ?



- Contrainte découlant de la force normale ($N_B = -H_A$)

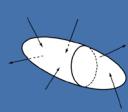


- Contrainte découlant de la force tangentielle ($T_B = V_A$)



- Contrainte découlant du moment de flexion ($M_B = -M_A + V_A \times AB$)



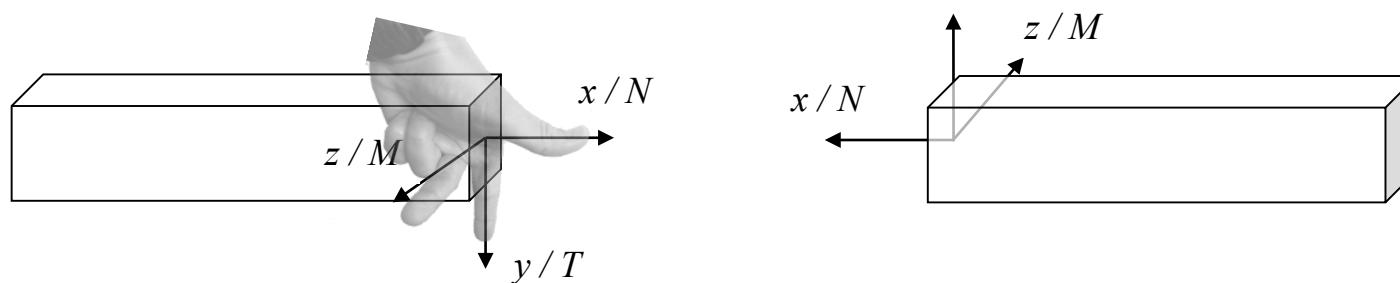


Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

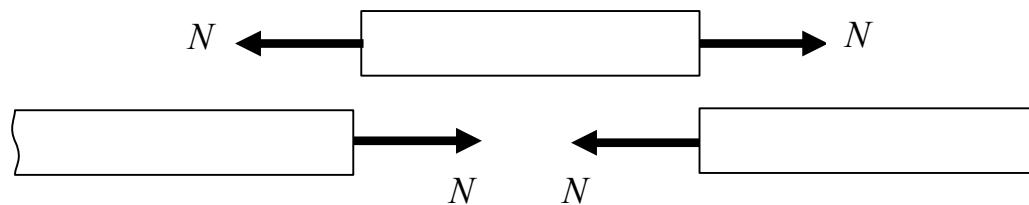
Définition des efforts intérieurs

Respecter les **conventions des signes**

- Repère de coordonnée (gauche et droit)



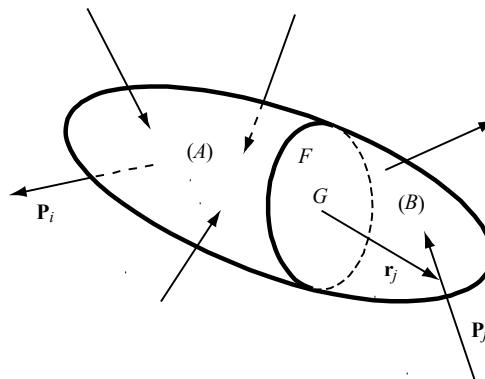
- On dessine par exemple la force N vers l'extérieur de la coupe



- N est positive si elle soumet le système à de la traction et négative pour la compression
- Si l'on trouve un scalaire négatif, c'est que le vecteur est dans le sens contraire de celui dessiné.

NOTE

Mécanique des structures

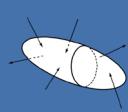


Chapitre 1: Equilibre intérieur d'un solide

Dr. Alain Prenleloup
SGM BA3 2024-2025

EPFL



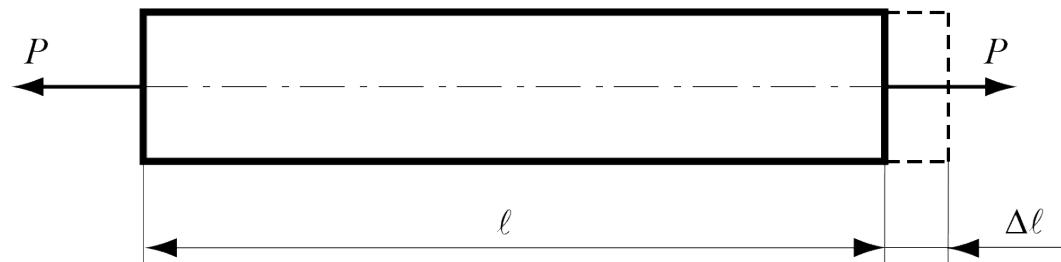


Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Constantes caractéristiques des matériaux linéaires isotropes

L'allongement $\Delta\ell$ d'un barreau prismatique de longueur ℓ et de section F sous l'effet d'une charge P est proportionnel à la charge et à la longueur, et inversement proportionnel à la section et à une constante E , appelée *module d'élasticité* ou *module de Young*, dépendant de la nature du matériau.

$$\bullet \quad \Delta\ell = \frac{P\ell}{E F}$$

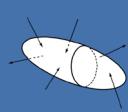


Sous sa forme élémentaire, la *loi de Hooke* exprime cette linéarité entre contrainte et allongement constatée dans la première phase de l'essai de traction de la plupart des matériaux.

$$\bullet \quad \sigma = \frac{P}{F} = \frac{\Delta\ell}{\ell} E = \varepsilon E \quad \rightarrow \text{unité } [MPa] = \frac{[N]}{[mm^2]} = \frac{[mm]}{[mm]} [MPa]$$

On a également introduit l'allongement spécifique : $\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell}$

NOTE



Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Constantes caractéristiques des matériaux linéaires isotropes

L'allongement spécifique ou **relatif** peut se justifier de la manière suivante :

- $\varepsilon = \frac{\text{allongement}}{\text{longueur initiale}} = \frac{[dx+u(x+dx)-u(x)]-dx}{dx}$

Développement en série de Taylor du premier ordre donne

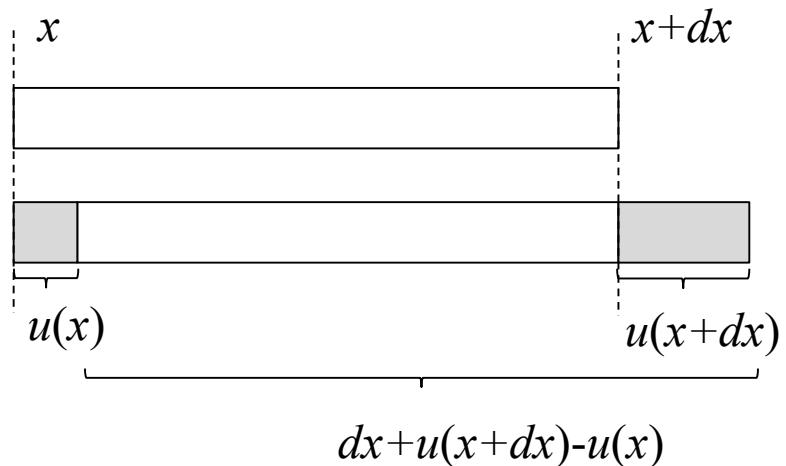
- $u(x + dx) = u(x) + u'(x)dx$

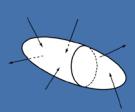
D'où

- $\varepsilon \cong \frac{u(x)+u'(x)dx-u(x)}{dx} = u'(x) = \frac{du}{dx}$

Donc finalement

- $\varepsilon = \frac{\text{allongement}}{\text{longueur initiale}} = \frac{\Delta\ell}{\ell_0}$

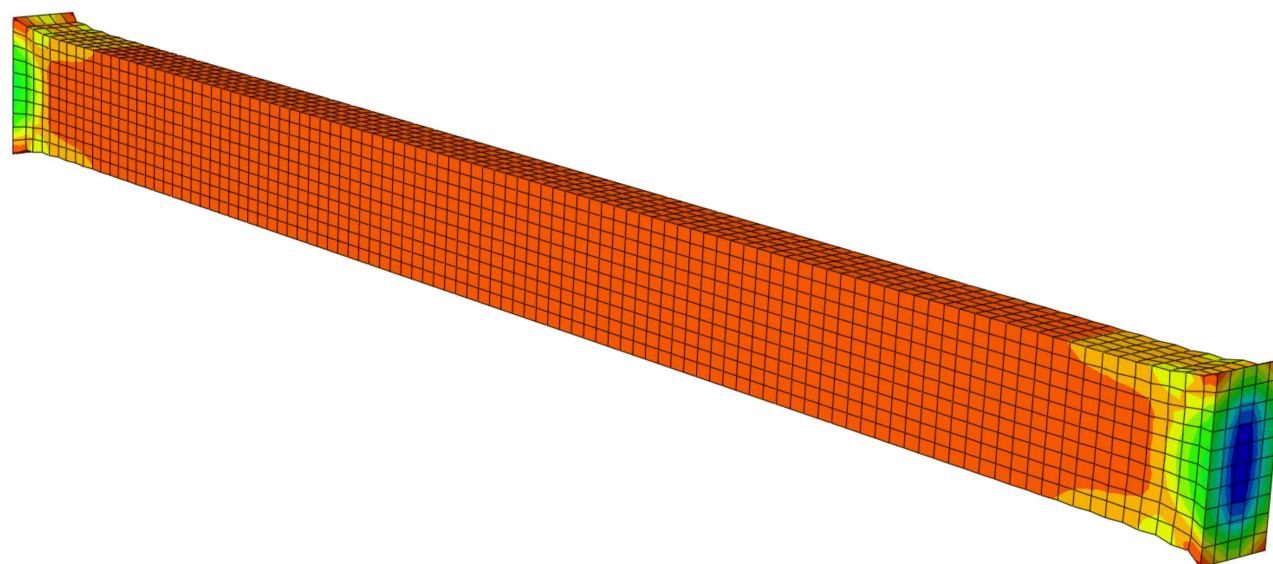


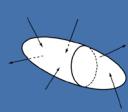


Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Module d'élasticité et coefficient de Poisson

Traction sur une bande de caoutchouc de 20 cm ($E = 100 \text{ MPa}$, $\mu = 0.49$)





Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

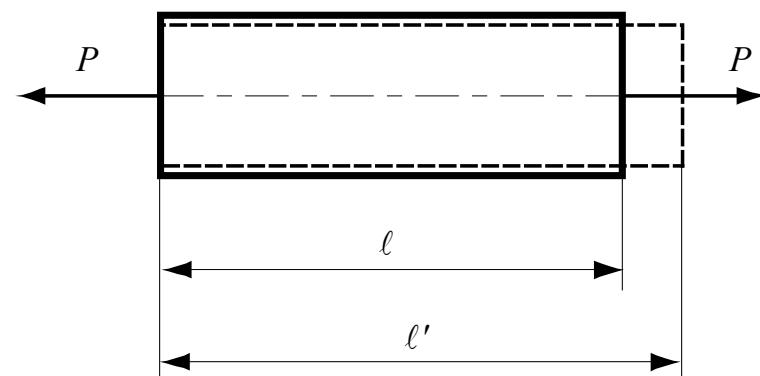
Module d'élasticité et coefficient de Poisson

Dans le domaine de comportement linéaire du matériau, l'**allongement transversal relatif** d'une dimension quelconque de la section est proportionnel, mais de signe contraire, à l'allongement relatif longitudinal ε de l'éprouvette.

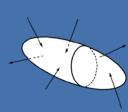
- $\varepsilon_t = -\mu \varepsilon$

Soit en introduisant la contrainte

- $\varepsilon_t = -\mu \frac{\sigma}{E}$



où le facteur de proportionnalité μ (noté souvent ν dans la littérature anglo-saxonne) est appelé **coefficient de Poisson**.



Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Module d'élasticité et coefficient de Poisson

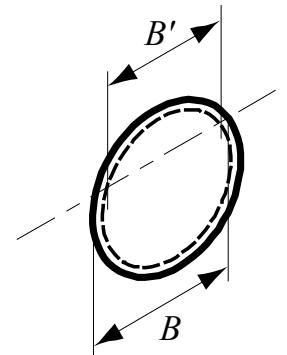
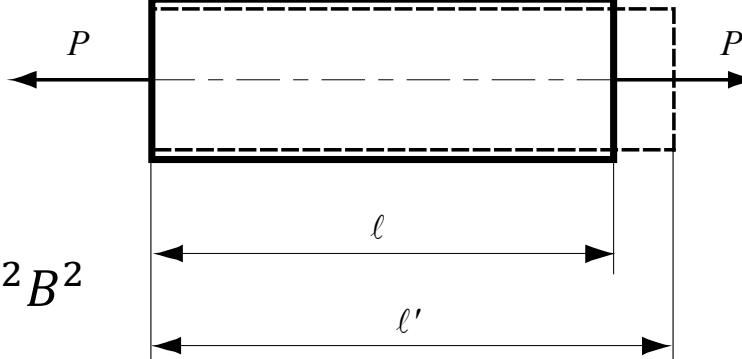
La variation de volume d'une section circulaire de longueur ℓ est donnée par

$$\bullet \quad \nu = \frac{V' - V}{V}$$

Avec

$$\bullet \quad V = \ell F = \ell \frac{\pi}{4} B^2$$

$$\bullet \quad V' = \ell' F' = (1 + \varepsilon) \ell \frac{\pi}{4} (1 + \varepsilon_t)^2 B^2$$



Et finalement

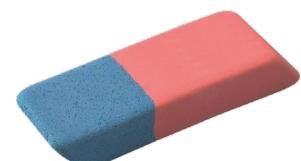
$$\bullet \quad \nu = \frac{V' - V}{V} = \frac{V'}{V} - 1 = (1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon_t)^2 - 1 \cong \varepsilon + 2\varepsilon_t = \varepsilon(1 - 2\mu)$$

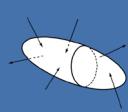
Comme $\nu > 0$, alors $\mu \leq \frac{1}{2}$

Que vaut le coefficient de Poisson de ces objets ?



et



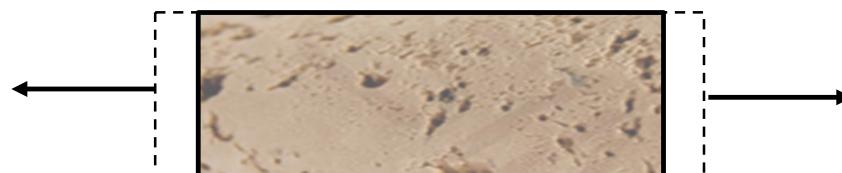


Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Module d'élasticité et coefficient de Poisson

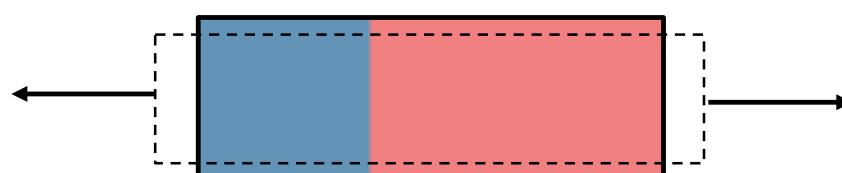
Coefficient liège $\mu \approx 0$

- $\varepsilon_t = -\mu \varepsilon = 0$
- $\nu = \varepsilon (1 - 2\mu) \cong \varepsilon$



Coefficient gomme $\mu \approx 1/2$

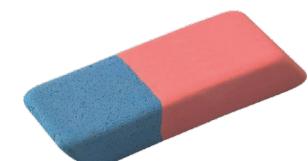
- $\varepsilon_t = -\mu \varepsilon \cong \frac{1}{2} \varepsilon$
- $\nu = \varepsilon (1 - 2\mu) \cong 0$

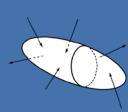


Que vaut le coefficient de Poisson de ces objets ?



et

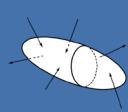




Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Module d'élasticité et coefficient de Poisson

Matériau	Désignation VSM	ρ [kg/m ³]	E [GPa]	μ [-]	σ_E [MPa]	σ_B [MPa]	ε_B [%]	A [10 ⁻⁶ /°C]
Aciers de construction	S 235 (Ac37-2)	7850	210	0,27	220	400	25	12
	E 295 (Ac50-2)	7850	210	0,27	280	540	19	12
	Ac50-2K (étiré à froid)	7850	210	0,27	410	720	8	12
Aciers inoxydables	X10CrNiS18 9	7900	200	0,30	200	600	35	16
	X20Cr13	7900	200	0,30	550	850	12	16
Fonte grise	GG-25	7200	100	0,25	–	2001	1	10
Aluminium	EN AW-Al 99.5 O	2700	69	0,33	25	80	30	24
Alliages d'aluminium	EN AW-Al MgSi T6	2700	70	0,33	250	280	10	23
	EN AW-Al Zn4.5Mg1 T62	2770	73	0,33	320	390	9	23
	EN AW-Al Cu4Mg1 T63	2790	72	0,33	570	630	9	23
Cuivre recuit	–	8900	120	0,35	40	210	50	17
Alliages cuivre-zinc4	G-CuZn33Pb2 (coulé)	8500	80	0,34	50	180	55	18

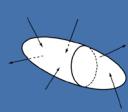


Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Module d'élasticité et coefficient de Poisson

Renfort	Diamètre [μm]	ρ [kg/m ³]	E [GPa]	μ_1 [-]	G [GPa]	σ_B [MPa]	ε_B [%]	α [10 ⁻⁶ /°C]
Verre E	16	2600	74	0.25	30	2500	3.5	5
Verre R	10	2500	86	0.2	30	3200	4	3
Carbone HM	6.5	1800	390	0.35	20	2500	0.6	0.8
Carbone HR	7	1750	230	0.3	50	3200	1.3	0.2
Kevlar 49	12	1450	130	0.4	12	2600	2.3	-2
Bore	100	2600	400			3400	0.8	4
Silicate d'alumine	10	2600	200			3000	1.5	

Matrice TD	ρ [kg/m ³]	E [GPa]	μ [-]	G [GPa]	σ_B [MPa]	ε_B [%]	α [10 ⁻⁶ /°C]
Epoxyde	1200	4.5	0.4	1.6	130	2	110
Phénolique	1300	3	0.4	1.1	70	2.5	10
Polyester	1200	4	0.4	1.4	80	2.5	80
Polycarbonate	1200	2.4	0.35		60		60
Polyamide	1400	4 – 19	0.35	1.1	70	1	80

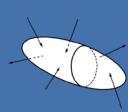


Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Module d'élasticité et coefficient de Poisson

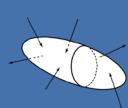
Renfort	Diamètre [μm]	ρ [kg/m ³]	E [GPa]	μ_1 [-]	G [GPa]	σ_B [MPa]	ε_B [%]	α [10 ⁻⁶ /°C]
Verre E	16	2600	74	0.25	30	2500	3.5	5
Verre R	10	2500	86	0.2	30	3200	4	3
Carbone HM	6.5	1800	390	0.35	20	2500	0.6	0.8
Carbone HR	7	1750	230	0.3	50	3200	1.3	0.2
Kevlar 49	12	1450	130	0.4	12	2600	2.3	-2
Bore	100	2600	400			3400	0.8	4
Silicate d'alumine	10	2600	200			3000	1.5	

Matrice TP	ρ [kg/m ³]	E [GPa]	μ [-]	G [GPa]	σ_B [MPa]	ε_B [%]	α [10 ⁻⁶ /°C]
PP	900	1.2			30	20 – 400	90
PPS	1300	4			65	100	60
PA	1100	2			70	200	90
PEI	1150	3.3			105	60	60
PEEK	1300	4			90	50	50



Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Essence	ρ [kg/m ³]	$\sigma_{\text{comp.}}$ [MPa]	$\sigma_{\text{traction-long.}}$ [MPa]	$\sigma_{\text{flex-paral.}}$ [MPa]	$E_{\text{long.}}$ [MPa]
Chêne	710	58	100	97	12500
Chataignier	620	46	128	71	8500
Frêne	720	51	145	113	12900
Hêtre	680	58	117	107	14300
Mélèze	600	53	101	93	12500
Merisier	610	49	98	96	12750
Noyer	660	63	97	117	11900
Peuplier	460	33	72	65	8800



Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

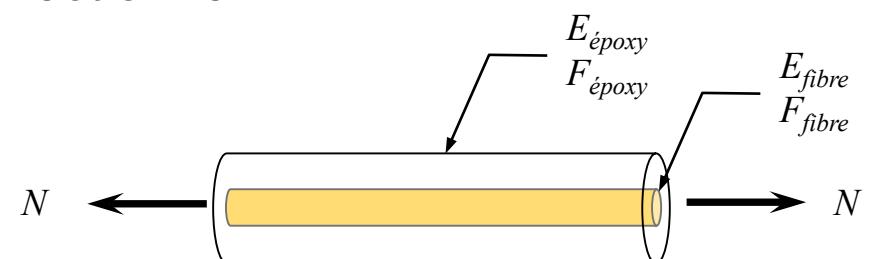
Constantes caractéristiques des matériaux linéaires isotropes

Rigidité d'une barre

- $k = \frac{N}{\Delta\ell} = \frac{F E}{\ell}$

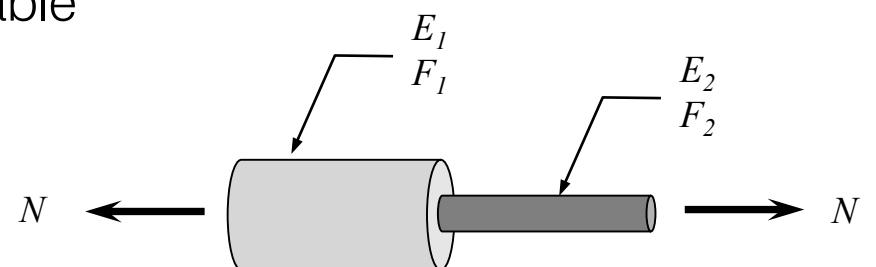
Application pour un matériau composite unidirectionnel

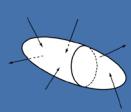
- $\Delta\ell = \Delta\ell_{fibre} = \Delta\ell_{époxy} = \frac{N_i}{k_i} = \frac{N_i \ell}{F_i E_i}$
- $k_{tot} = \sum k_i = \frac{N_{fibre} + N_{époxy}}{\Delta\ell} = \frac{\sum F_i E_i}{\ell}$
- $N_{tot} = N_{fibre} + N_{époxy}$



Application pour une barre de diamètre variable

- $\Delta\ell_i = \frac{N}{k_i} = \frac{N \ell_i}{F_i E_i}$
- $\Delta\ell_{tot} = \sum \Delta\ell_i = \frac{N}{k_{tot}}$
- $k_{tot} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1}$





Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

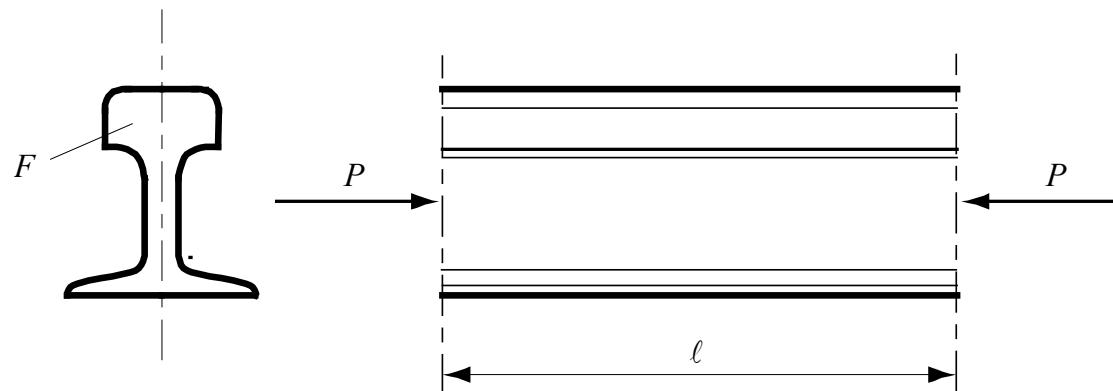
Problème 1.1

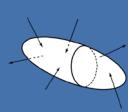
Calculer la contrainte et la force dans un long rail soudé soumis à un écart de température de $\Delta\theta = \pm 50 \text{ }^{\circ}\text{C}$

Section $F = 75 \text{ cm}^2$

Module $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa} = 210 \text{ GPa}$

Coeff. therm. $\alpha = 12 \times 10^{-6} /{}^{\circ}\text{C}$

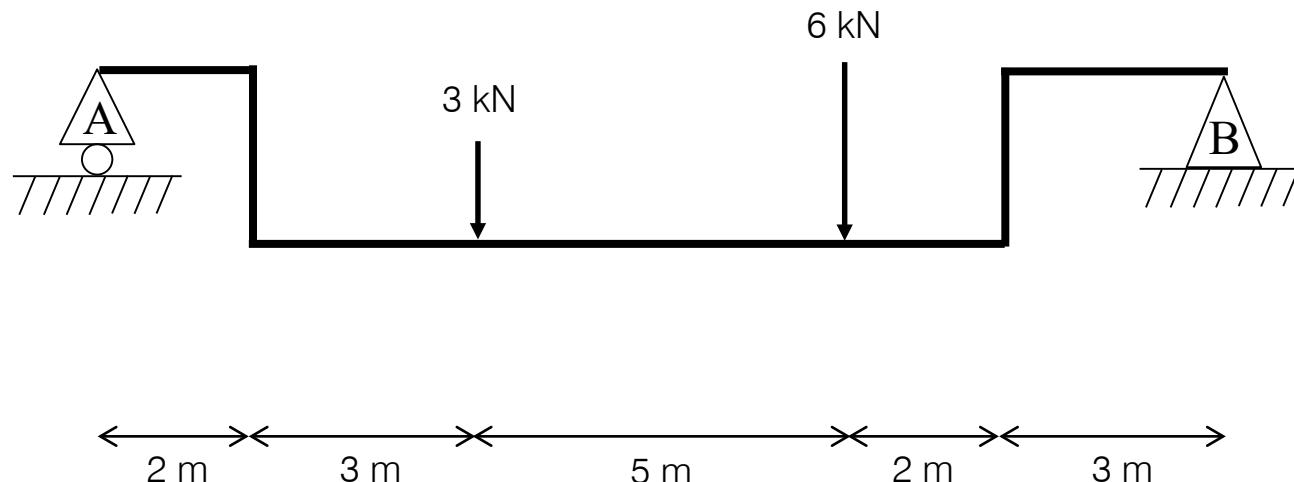




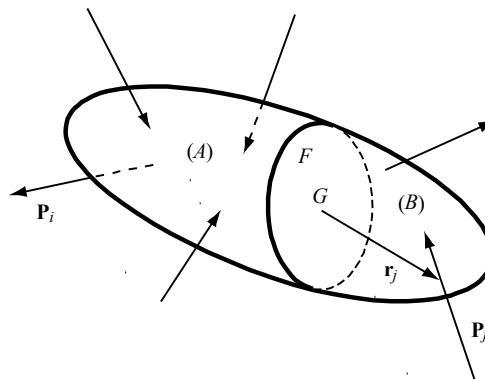
Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Problème 1.2

Calculer les réactions R_A et R_B pour le système ci-dessous, puis représenter les diagrammes des efforts intérieurs N (effort normal), T (effort tranchant), et M (moment fléchissant), en indiquant les valeurs particulières.



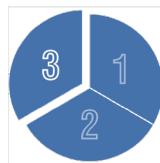
Mécanique des structures

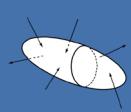


Chapitre 1: Equilibre intérieur d'un solide

Dr. Alain Prenleloup
SGM BA3 2024-2025

EPFL





Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

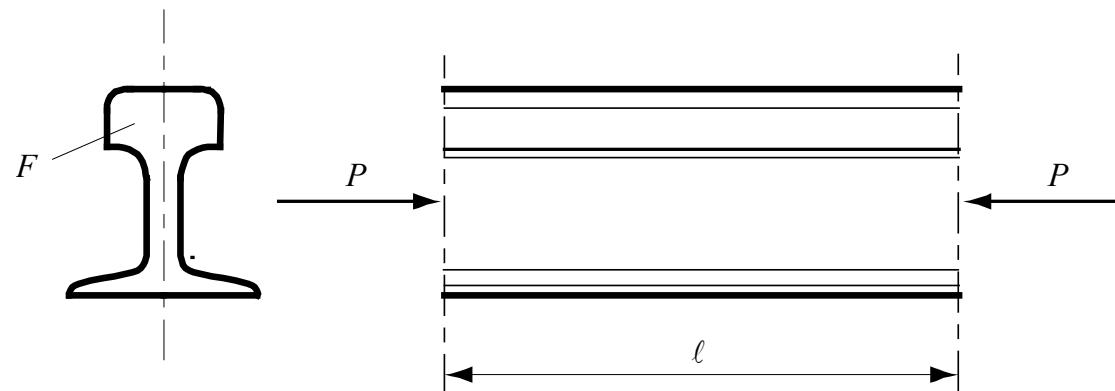
Problème 1.1

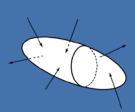
Calculer la contrainte et la force dans un long rail soudé soumis à un écart de température de $\Delta\theta = \pm 50 \text{ }^{\circ}\text{C}$

Section $F = 75 \text{ cm}^2$

Module $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa} = 210 \text{ GPa}$

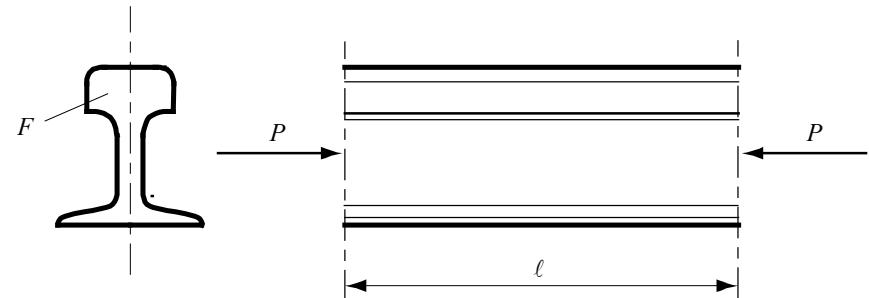
Coeff. therm. $\alpha = 12 \times 10^{-6} /{}^{\circ}\text{C}$

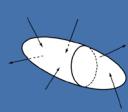




Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Problème 1.1

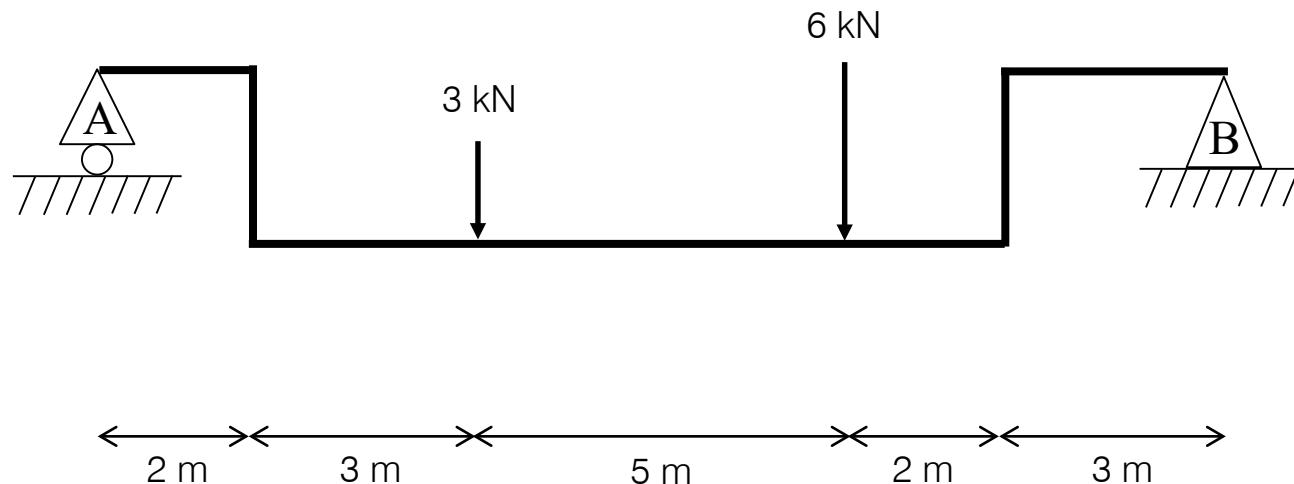


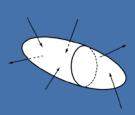


Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Problème 1.2

Calculer les réactions R_A et R_B pour le système ci-dessous, puis représenter les diagrammes des efforts intérieurs N (effort normal), T (effort tranchant), et M (moment fléchissant), en indiquant les valeurs particulières.

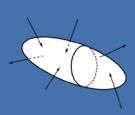




Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Problème 1.2





Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Problème 1.2



Annexe III : Moment d'une aire plane

Efforts intérieurs et contraintes

Considérons un corps solide en équilibre :

(A) corps A

F section plane

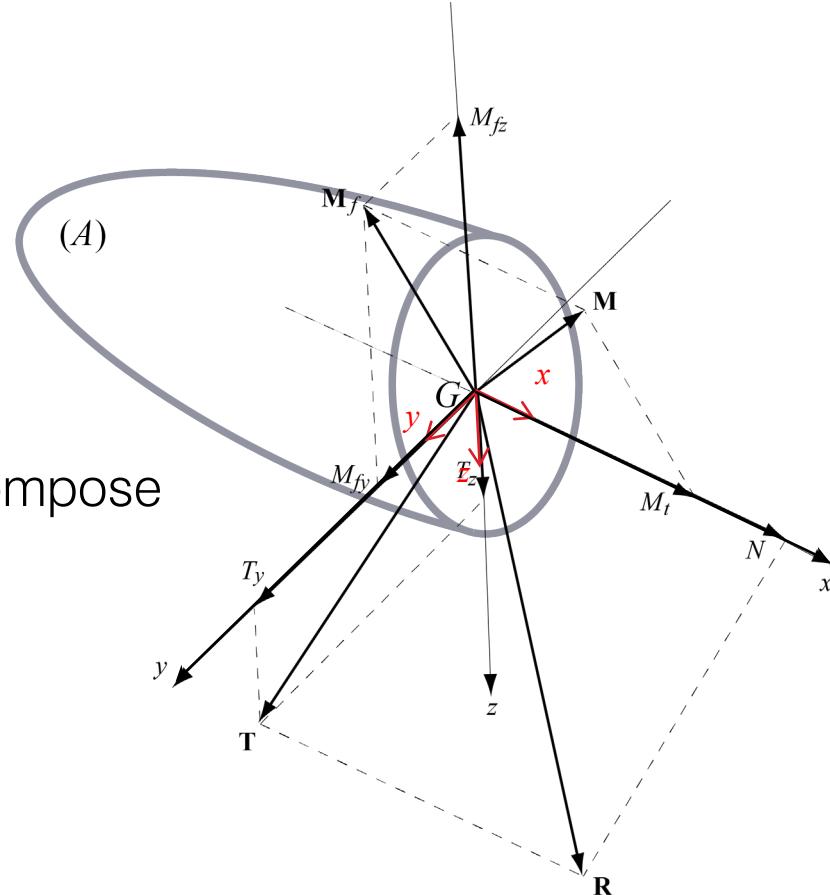
G centre de gravité de la section

\mathbf{R} force

\mathbf{M} moment

Le torseur des efforts intérieurs se décompose comme suit⁽¹⁾:

- N = effort normal = \mathbf{R} selon Gx
- \mathbf{T} = effort tranchant = $\mathbf{T} = T_y \mathbf{j} + T_z \mathbf{k}$
- M_t = moment de torsion = \mathbf{M} selon Gx
- \mathbf{M}_f = moment de flexion = $\mathbf{M}_f = M_{fy} \mathbf{j} + M_{fz} \mathbf{k}$



⁽¹⁾ Les composantes d'un vecteur sont symbolisés par un caractère gras

Annexe III : Moment d'une aire plane

Efforts intérieurs et contraintes

Considérons un corps solide en équilibre :

(A) corps A

F section plane

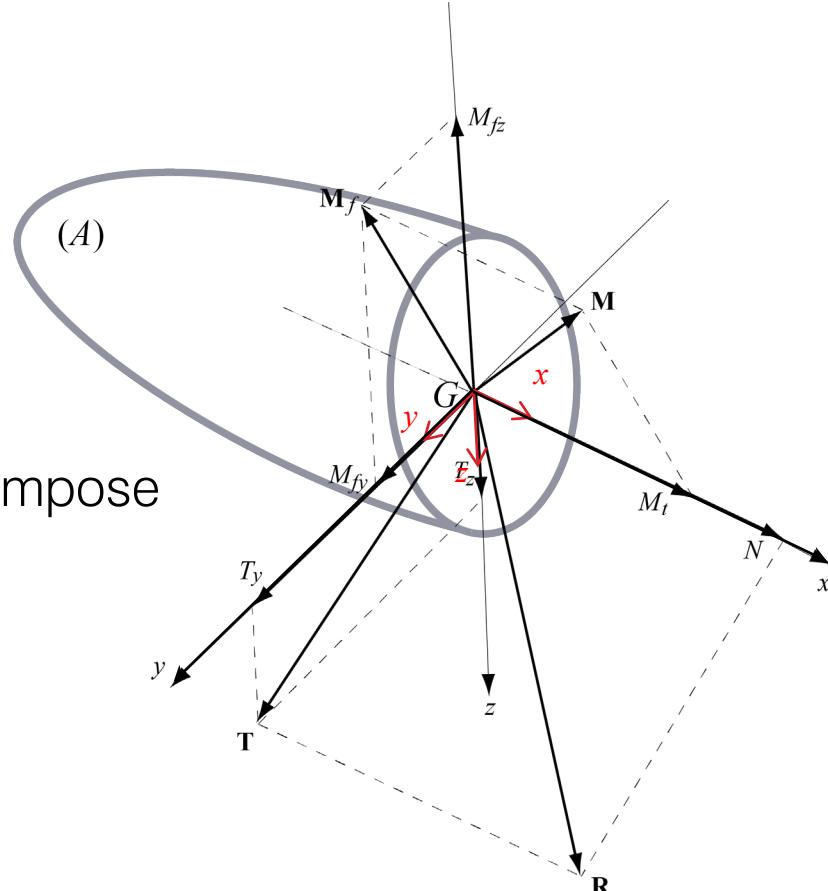
G centre de gravité de la section

R force

M moment

Le torseur des efforts intérieurs se décompose comme suit :

- $N = \iint_F \sigma \, dF$
- $T_y = \iint_F \tau_y \, dF$ et $T_z = \iint_F \tau_z \, dF$
- $M_t = - \iint_F \tau_z \, y - \tau_y \, z \, dF$
- $M_{fy} = - \iint_F \sigma(z) \, z \, dF$ et $M_{fz} = \iint_F \sigma(y) \, y \, dF$



Annexe III : Moment d'une aire plane

Torseur des efforts et centre de gravité

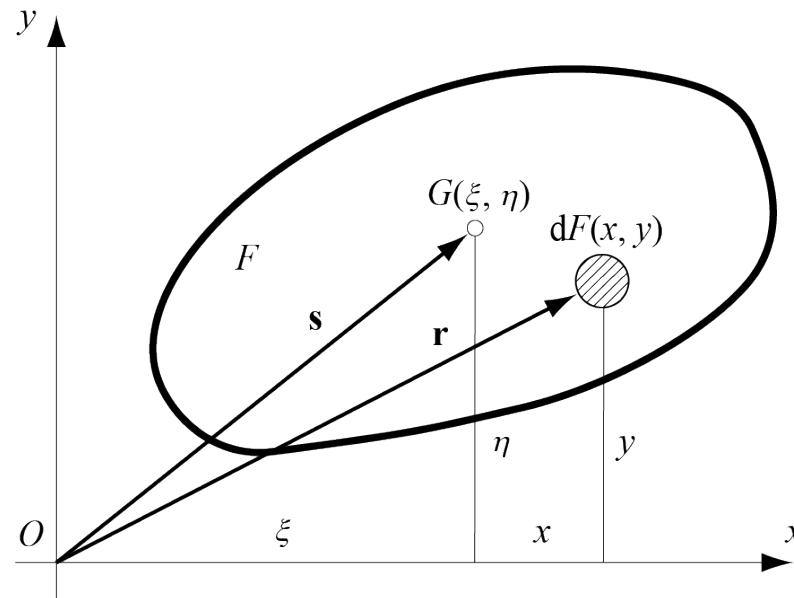
- Le **torseur** est un outil mathématique utilisé principalement en mécanique du solide indéformable, pour décrire les mouvements des solides et les actions mécaniques qu'il subit de la part d'un environnement extérieur.
- Le **torseur** considéré dans ce chapitre contient les forces et moments de force équivalente de la partie (B) du corps solide sur la partie (A) et vice-versa et appliquée au centre de gravité de la surface.
- Le **moment statique** est une grandeur physique qui caractérise la géométrie d'une section et se définit par rapport à un axe.
- Le **moment statique** d'une section de densité homogène, par rapport à un axe, est égal au produit de l'aire de cette section par la distance de son centre de gravité à l'axe = le moment statique d'une section de densité homogène, par rapport à un axe passant par son centre de gravité, est nul

Annexe III : Moment d'une aire plane

Moment du premier ordre

Les moments du premier ordre ou moments statiques d'une aire plane F du plan Oxy par rapport respectivement à l'origine O , à l'axe Ox et l'axe Oy se définissent de la manière suivante

- $\mathbf{S} = \iint_F \mathbf{r} dF$ [m³]
- $S_x = \iint_F y dF$ [m³]
- $S_y = \iint_F x dF$ [m³]



où \mathbf{r} est le vecteur-lieu de l'élément d'aire dF . Relevons que les moments S_x et S_y sont simplement les composantes du moment \mathbf{S}



Annexe III : Moment d'une aire plane

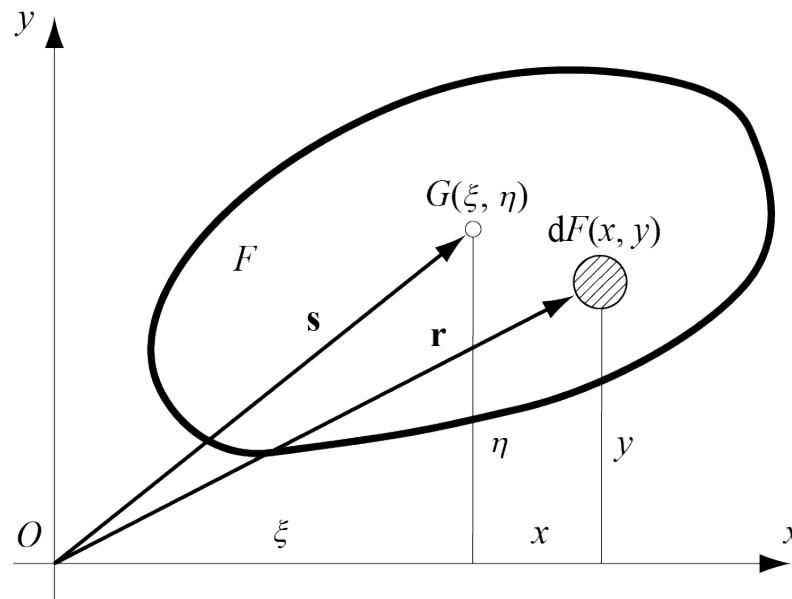
Moment du premier ordre

La connaissance des moments statiques permet de déterminer la position \mathbf{s} du *centre d'inertie* G de l'aire, ainsi que ses deux composantes ξ et η

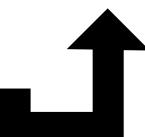
- $\mathbf{s} = \frac{\iint_F \mathbf{r} dF}{\iint_F dF} = \frac{\mathbf{s}}{F}$ [m]

- $\xi = \frac{\iint_F x dF}{\iint_F dF} = \frac{s_y}{F}$ [m]

- $\eta = \frac{\iint_F y dF}{\iint_F dF} = \frac{s_x}{F}$ [m]



Les moments S_x et S_y sont nuls lorsque les axes passent par le centre d'inertie G ($\xi = \eta = 0$)



Annexe III : Moment d'une aire plane

Moment du premier ordre : surface rectangulaire

Intégration du moment statique par rapport à l'axe x

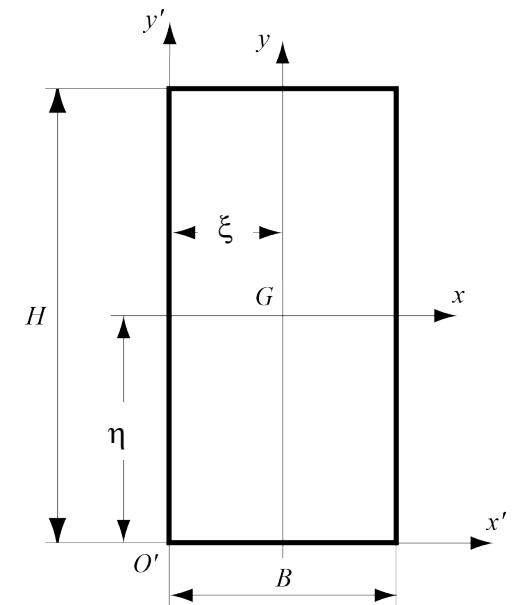
- $S_x = \iint_F y \, dF = \int_{y=-H/2}^{H/2} \int_{x=-B/2}^{B/2} y \, dx \, dy = 0$

Intégration du moment statique par rapport à l'axe x'

- $S_{x'} = \iint_F y \, dF = \int_{y=0}^H \int_{x'=-B/2}^{B/2} y \, dx \, dy = \frac{BH^2}{2}$

Positionnons du centre de gravité par rapport x'

- $\eta = \frac{\iint_F y \, dF}{\iint_F dF} = \frac{S_{x'}}{F} = \frac{H}{2}$



Approche discrète : le premier moment de l'aire est la somme des aires multipliée par la distance du centre de gravité de cette aire à de l'axe considéré.

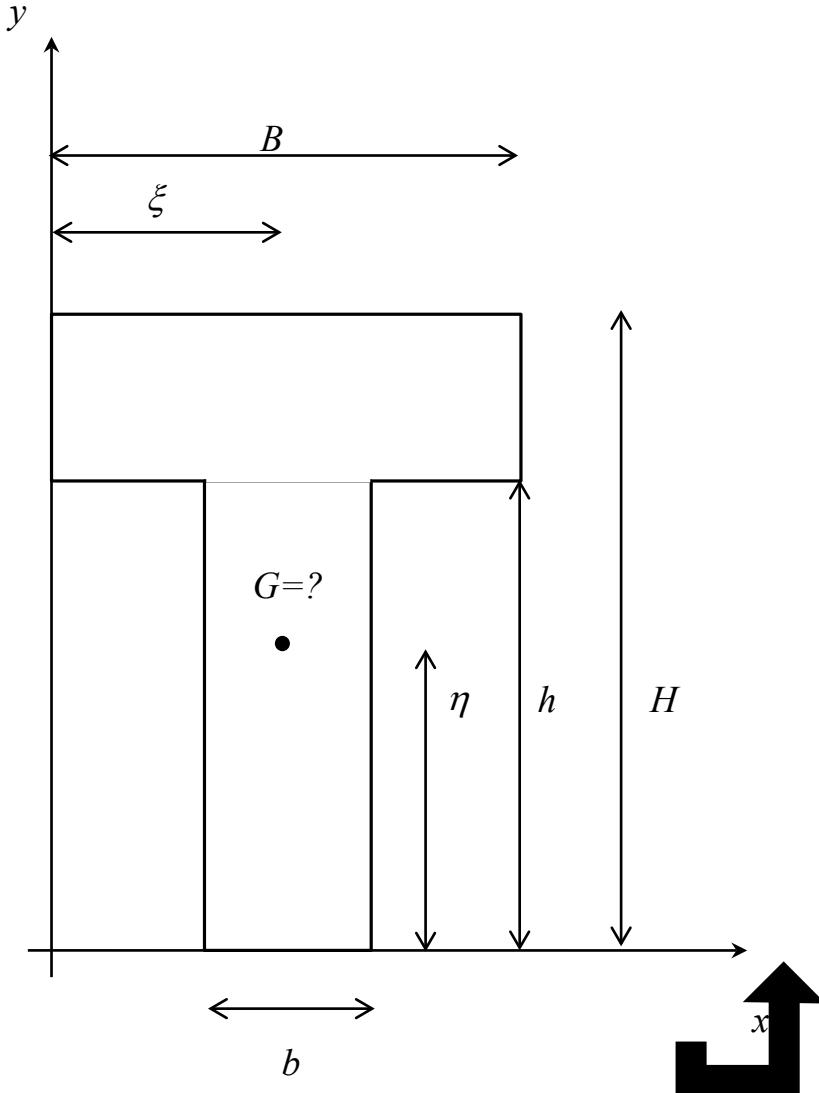
- $S_{x'} = \sum y \, F = \frac{H}{2} \cdot B \cdot H = \frac{BH^2}{2}$



Annexe III : Moment d'une aire plane

Centre de gravité et moment statique

- $S_x = \sum y F = \frac{h}{2} bh + (h + (H - h)/2) (H - h)B$
 $= \frac{h^2 b}{2} - \frac{h^2 B}{2} + \frac{H^2 B - h^2(B-b)}{2}$
- $F = BH - h(B - b)$
- $\eta = \frac{S_x}{F}$
- $S_y = \sum x F = \frac{B^2 H - hB(B-b)}{2}$
- $\xi = \frac{S_y}{F} \frac{B^2 H - hB(B-b)}{2BH - h(B-b)} = \frac{B}{2}$

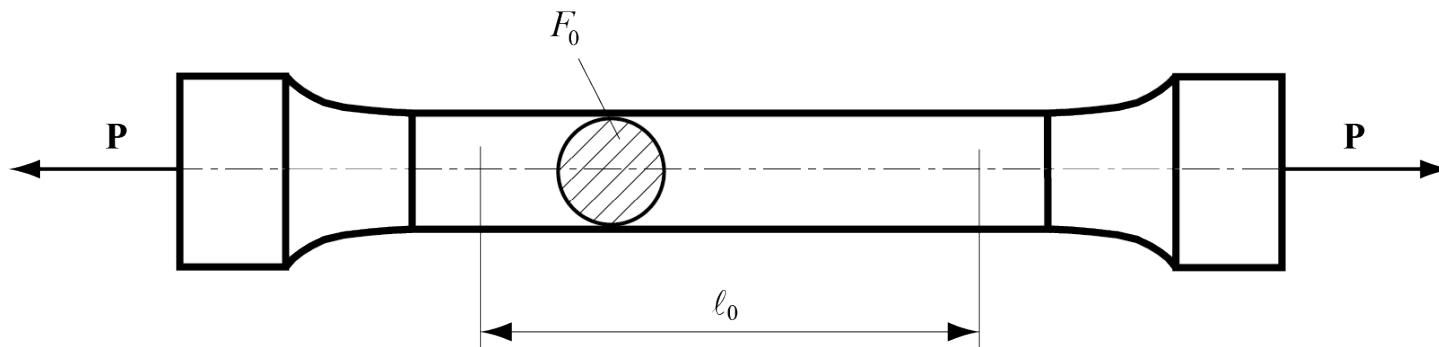


Annexe I : Propriété mécaniques des matériaux

Essai de traction

À part le cas très simple de certains monocristaux parfaits, la théorie ne permet que d'expliquer les propriétés mécaniques des matériaux et non pas de les calculer.

Ces propriétés sont donc mesurées au cours des essais de matériaux, le plus important d'entre eux étant l'*essai de traction*



Sous l'effet de la charge appliquée P , la section diminue et la longueur augmente. L'allongement $\Delta\ell$ est mesuré par la variation de longueur d'une base initiale ℓ_0 , plus courte que la partie cylindrique de l'éprouvette



Annexe I : Propriété mécaniques des matériaux

Essai de traction

La *contrainte nominale* est la charge rapportée à la section initiale

- $\sigma = \frac{P}{F_0}$ (vrai seulement si σ est constant dans la section)

La *contrainte réelle* est la charge rapportée à la section réelle

- $\sigma' = \frac{P}{F}$

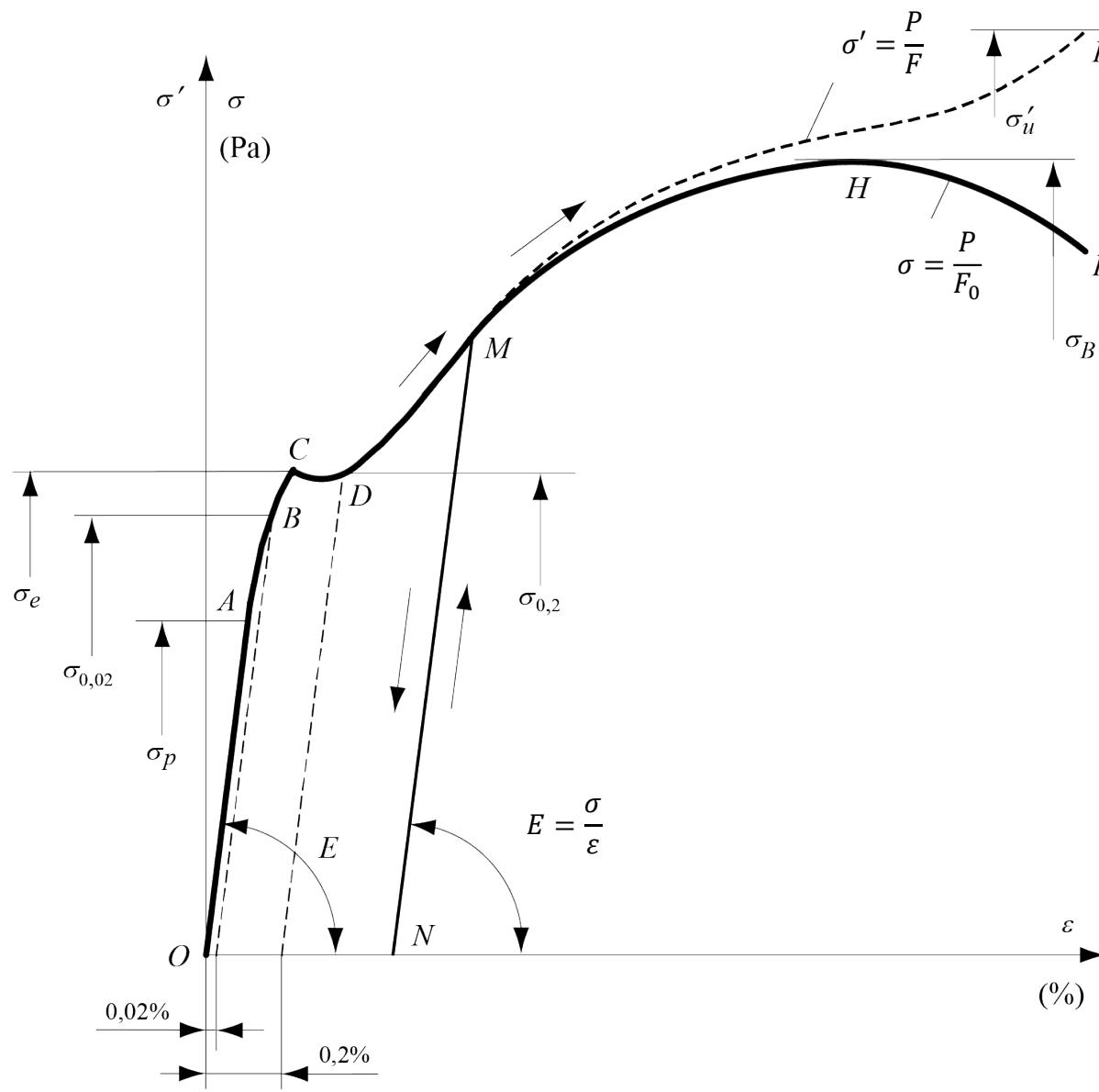
L'*allongement relatif* est l'allongement $\Delta\ell$ rapporté à la base de mesure ℓ_0

- $\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_0}$



Annexe I : Propriété mécaniques des matériaux

Essai de traction



$$\sigma' = \frac{P}{F}$$

$$\sigma = \frac{P}{F_0}$$

(%)

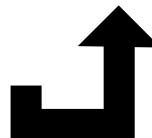
$$\sigma_u'$$

$$\sigma_B$$

phénomène de striction



https://www.youtube.com/watch?v=RY9X_O8is-k



Annexe I : Propriété mécaniques des matériaux

Essai de traction

La grandeur de l'allongement rémanent après décharge et les points particuliers du diagramme permettent de définir les contraintes caractéristiques suivantes :

- la *limite de proportionnalité* σ_p correspondant à la fin du domaine proportionnel (point *A*);
- la *limite conventionnelle de proportionnalité* $\sigma_{0,02}$ correspondant à un allongement rémanent de 0,02 % (point *B*)
- la *limite apparente d'élasticité*; σ_e ou *limite d'écoulement* correspondant au seuil d'écoulement plastique plus ou moins marqué du diagramme (point *C*);
- la *limite conventionnelle d'élasticité* $\sigma_{0,2}$ correspondant à un allongement rémanent de 0,2 % (point *D*)
- la *résistance à la traction* σ_B correspondant à la charge la plus élevée supportée par l'éprouvette (point *H*)
- la *contrainte réelle de rupture* $\sigma_{égale}$ au quotient de la charge par la section réelle Fau moment de la rupture de l'éprouvette (point *R'*).

Dans la partie rectiligne du diagramme, le rapport entre la contrainte et l'allongement relatif est une constante appelée module d'élasticité

- $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$

